5.1.1 Pendel: $T \sim \sqrt{\ell}$

******

1 Motivation

Dieser Versuch zeigt die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T eines mathematischen Pendels von der Fadenlänge ℓ:

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{1}$$

2 Theorie

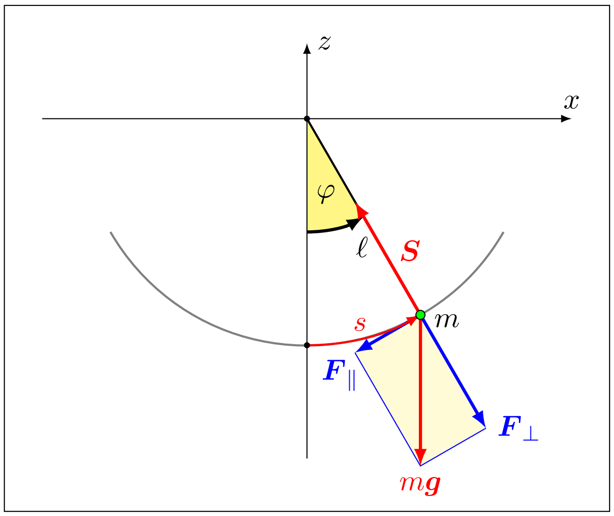

Abbildung 1: Mathematisches Pendel.

Wir betrachten einen Massenpunkt der Masse m, welcher an einem masselosen Faden der Länge ℓ an einem Punkt drehbar aufgehängt ist. Reibungskräfte am Drehpunkt sowie Luftwiderstand vernachlässigen wir. Damit wirken die Schwerkraft $m\boldsymbol{g}$ und die Seilkraft $\boldsymbol{S}$. Einen solchen idealisierten Aufbau nennt man das mathematische Pendel (siehe Abb. 1). Sei φ der Winkel zwischen dem Faden und der Vertikalen. Zur Herleitung der Schwingungsgleichung wenden wir den Satz von Newton an:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{2}$$

Die Seilzugkraft $\boldsymbol{S}$ hebt die Wirkung der zur Bahn senkrechten Komponente $\boldsymbol{F}_\perp$ der Schwerkraft auf:

$$\boldsymbol{S} + \boldsymbol{F}_\perp = 0 \tag{3}$$

Damit wird der Massenpunkt m vom Faden auf eine Kreisbahn mit Radius ℓ gezwungen, da die von der Schwerkraft verursachte Beschleunigung nur eine Komponente tangential zu dieser Kreisbahn hat.

Sei s die vom Tiefpunkt des Pendels aus gemessene Bogenlänge, dann finden wir

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -mg\ell\sin\varphi\,, \tag{4}$$

und, da die Bogenlänge $s = \ell\varphi$ ist,

$$m\ell\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\varphi \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0 \tag{6}$$

Für kleine Auslenkungen gilt die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$, so dass man schliesslich die Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0} \tag{7}$$

erhält. Es fällt auf, dass die Bewegung des Pendels unabhängig von der Masse m ist, die sich ja aus aus der Gleichung herausgekürzt hat! Es handelt sich hier um eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Dies ist die Gleichung des harmonischen Oszillators:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{8}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \tag{9}$$

Das Pendel beschreibt also eine harmonische Schwingung mit der Anfangsamplitude φ_0 und der Periode

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \tag{10}$$

Die Periode ist demnach unabhängig von der Masse des Pendels und zusätzlich auch von der Anfangsamplitude φ_0, falls diese klein ist!

3 Experiment

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 2 wiedergegeben. Man misst zunächst die Schwingungsdauer T_1 mit dem langen Faden ℓ_1 und anschliessend T_2 mit dem kurzen Faden $\ell_2 = \ell_1/4$. Aus Gl. (10) folgt dann:

$$\boxed{T_2 = \tfrac{1}{2}T_1} \tag{11}$$

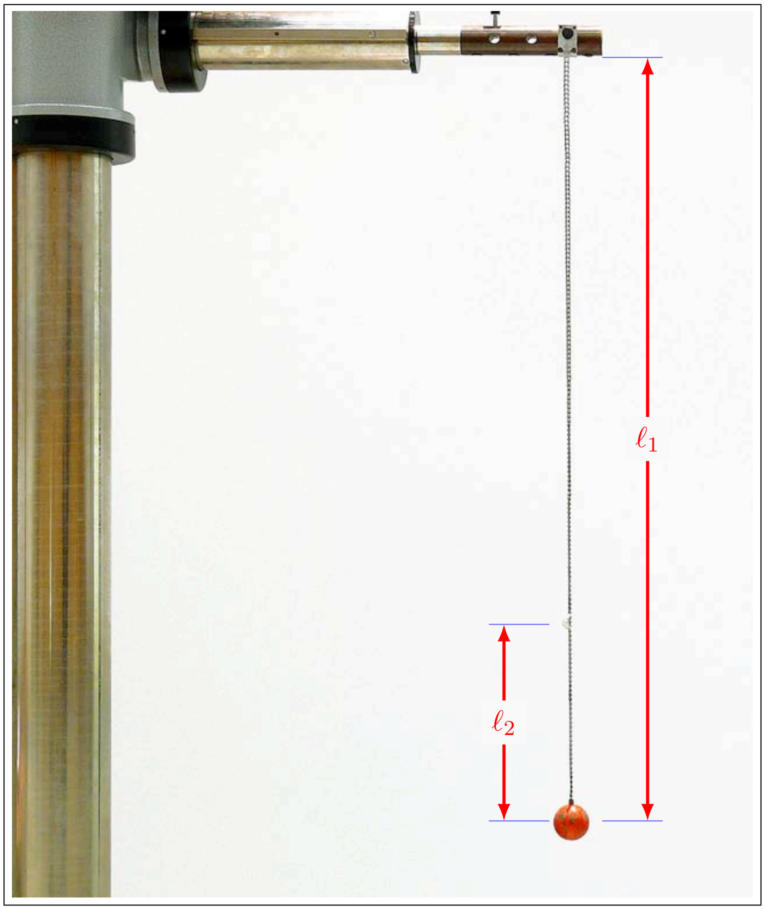

Abbildung 2: Pendel mit zwei Fadenlängen ℓ_1 und $\ell_2 = \ell_1/4$